Kapitel 5

Vektorräume, lineare Abbildungen und Matrizen

5.1 Axiome und Beispiele

Sei K ein Körper (in der Regel betrachten wir den Körper der reellen Zahlen). Wir wollen nun Vektoren über diesem Körper bilden und damit rechnen. Wie zuvor fangen wir an, indem wir Axiome eine solchen 'Vektorraums' formulieren.

Definition: Eine Menge V mit zwei Abbildungen

$$\text{Mal}\colon K \times V \to V, (k, v) \mapsto kv$$

und

$$\text{Plus}\colon V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w$$

heißt K-*Vektorraum*, wenn folgende Axiome gelten:

Additionsaxiome

- Assoziativgesetz: $\forall u, v, w \in V\colon u + (v + w) = (u + v) + w$.
- Kommutativgesetz: $\forall u, v \in V\colon u + v = v + u$.
- Existenz der Null: $\exists 0 \in V\, \forall u \in V\colon u + 0 = u$.
- Existenz des Negativen: $\forall u \in V\, \exists -u \in V\colon u + (-u) = 0$.

Skalarmultiplikationsaxiome

- Assoziativgesetz: $\forall \lambda, \mu \in K, v \in V\colon \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$.
- Distributivgesetze: $\forall \lambda, \mu \in K, v \in V\colon (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
  und $\forall \lambda \in K, v, w \in V\colon \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
- Multiplikation mit Eins: $\forall v \in V\colon 1v = v$.

In allen unseren Beispielen ist der Körper K (den man als Skalarenkörper bezeichnet) der Körper der reellen Zahlen. Wir sprechen dann einfach von einem Vektorraum, ohne $\mathbb{R}$ speziell zu erwähnen.

Beispiele:

- Sei $\mathbb{R}^d := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ die Menge aller d-Tupel

  $$v = (v_1, \ldots, v_d), \qquad \text{mit Koordinaten } v_i \in \mathbb{R}.$$

  Man versieht ihn mit koordinatenweise Addition

  $$(v_1, \ldots, v_d) + (w_1, \ldots, w_d) = (v_1 + w_1, \ldots, v_d + w_d)$$

  und Skalarmultiplikation

  $$\lambda(v_1, \ldots, v_d) = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_d).$$

  Dieser Vektorraum heißt d-dimensionaler *Euklidischer Raum*.

- Die Menge aller Folgen (a_n) mit gliedweise Addition

  $$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

  und Skalarmultiplikation

  $$\lambda(a_n) = (\lambda a_n)$$

  bildet einen Vektorraum. Auch die Teilmengen

  - $\mathfrak{c}$ aller konvergenten Folgen,
  - $\mathfrak{c}_0$ aller gegen null konvergenten Folgen,
  - ℓ^∞ aller beschränkten Folgen, und
  - ℓ^2 aller Folgen (a_n) mit $\sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty$

  bilden Vektrorräume mit dieser Addition und Skalarmultiplikation.

- Für jedes nichtleere Intervall $[a, b]$ bilden die Menge aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der durch $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ gegebenen Addition und der durch $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ gegebenen Skalarmultiplikation bildet einen Vektorraum. Auch die Teilmengen

  - $\mathcal{C}([a, b])$ der stetigen Funktionen,
  - $L^\infty([a, b])$ der beschränkten Funktionen,
  - $\mathcal{R}([a, b])$ der Riemann-integrierbaren Funktionen,

– $\mathcal{C}^1([a,b])$ der differenzierbaren Funktionen mit stetiger Ableitung,

bilden Vektrorräume mit dieser Addition und Skalarmultiplikation.

- Die Menge

$$\mathcal{P}[K] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \colon n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in K\}$$

aller Polynome mit Addition

$$(a_0 + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + \cdots + b_m x^m) = (c_0 + \cdots + c_k x^k),$$

wobei $k = n \vee m$ und $c_i = a_i + b_i$ mit $a_j = 0$ für $j > n$ und $b_j = 0$ für $j > m$, und Skalarmultiplikation

$$\lambda(a_0 + \cdots + a_n x^n) = (\lambda a_0 + \cdots + \lambda a_n x^n)$$

bildet einen Vektorraum.

Sind $W \subset V$ Vektorräume bezüglich derselben Addition und Skalarmultiplikation, so heißt W *Unterraum* oder *Teilraum* von V. Zum Beispiel ist

- $\mathfrak{c}_0$ Unterraum von $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$ Unterraum von ℓ^∞,
- $\mathcal{C}([a,b])$ und $\mathcal{R}([a,b])$ Unterraum von $L^\infty([a,b])$.

Ein interessanter Unterrraum von $\mathcal{C}([a,b])$ ist der Raum $\mathcal{A}([a,b])$ der *affinen Funktionen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto A + B(x-a)$ für $A, B \in \mathbb{R}$. Um zu prüfen, dass $\mathcal{A}([a,b])$ ein Unterraum ist, genügt es zu zeigen, dass die Summe zweier affiner Funktionen und das Skalarprodukt eines Skalars $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einer affinen Funktion selbst wieder affin sind.

Bemerkung: Sind $U, V \subset W$ Unterräume, so ist $U \cap W$ auch ein Unterraum von W, aber $U \cup W$ ist im allgemeinen kein Unterrraum von W.

5.2 Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension

Satz 2.1 und Definition. Ist W ein Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in W$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Unterraum $V \subset W$ mit den Eigenschaften

- $v_1, \ldots, v_n \in V$,
- ist $U \subset W$ ein Unterraum mit $v_1, \ldots, v_n \in U$, so folgt $V \subset U$.

V ist also der kleinste Unterraum, der $v_1, \dots, v_n$ enthält, oder der von $v_1, \dots, v_n$ *aufgespannte Unterraum.* Es gilt

$$V = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \colon \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \Big\},$$

in anderen Worten V besteht aus allen *Linearkombinationen von* $v_1, \dots, v_n$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Menge

$$V = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \colon \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \Big\}$$

ein Unterraum mit den beiden angegebenen Eigenschaften ist.

Sind nämlich zwei Elemente $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$ und $\sum_{k=1}^{n} \lambda'_k v_k$ aus V gegeben, so ist ihre Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k v_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \lambda'_k) v_k$$

und somit auch ein Element von V, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$\lambda \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \lambda_k) v_k$$

auch ein Element von V. Folglich ist V ein Unterraum von W. Offensichtlich gilt $v_k \in V$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, man wähle nämlich $\lambda_k = 1$ und $\lambda_i = 0$ für alle $i \neq k$. Sei nun $U \subset W$ ein Unterraum mit $v_1, \dots, v_n \in U$ und $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$ ein beliebiges Element von V. Dann gilt nach der Unterraumeigenschaft von U zunächst $\lambda_k v_k \in U$ und dann auch $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \in U$. Folglich ist $V \subset U$.

Schließlich sei V' ein beliebiger Unterraum von W mit den beiden Eigenschaften. Dann gilt nach der zweiten Eigenschaft $V \subset V'$. Außerdem ist $v_1, \dots, v_n \in V'$ nach der ersten Eigenschaft und die zweite Eigenschaft für V impliziert $V' \subset V$. Es folgt $V = V'$ und damit die Eindeutigkeit.

Beispiel: Betrachte $\mathcal{C}([a, b])$ und die Vektoren v_1, v_2, die durch die Funktionen $v_1 \colon [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ und $v_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ gegeben sind. Der von v_1, v_2 aufgespannte Unterraum ist

$$\begin{aligned} &\big\{ f \colon [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 x \colon \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \big\} \\ &\qquad = \big\{ f \colon [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto A + B(x - a) \colon A, B \in \mathbb{R} \big\}, \end{aligned}$$

denn $\lambda_1 + \lambda_2 x = A + B(x - a)$ wenn zu gegebenem λ_1, λ_2

$$A = \lambda_1 + a\lambda_2, B = \lambda_2$$

gewählt wird und umgekehrt zu gegebenem A, B

$$\lambda_1 = A - aB, \lambda_2 = B$$

gewählt wird. Also ist der von v_1, v_2 aufgespannte Raum genau der Raum $\mathcal{A}([a,b])$ der affinen Funktionen.

Definition. Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen ein *Erzeugendensystem*, wenn sie den gesamten Vektorraum V aufspannen. Mit anderen Worten $v_1, \ldots, v_n \in V$ bilden genau dann ein Erzeugendensystem, wenn zu jedem $v \in V$ Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ existieren mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Beispiel: Die drei Vektoren $v_1 \colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ und $v_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ und $v_3 \colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x - a$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}([a,b])$. Aber auch v_1, v_3 bilden ein Erzeugendensystem, ebenso wie v_1, v_2 . Die Vektoren v_2, v_3 bilden nur dann ein Erzeugendensystem, wenn $a \neq 0$.

Definition. Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen *linear unabhängig*, wenn aus $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

folgt, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Definition. Ein Erzeugendensystem aus linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißt *Basis* des Vektorraums V.

Satz 2.2. Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind genau dann eine Basis des Vektorraums V, wenn zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Beweis: Sei zunächst $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des Vektorraums V. Da diese V erzeugt gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Wenn es eine zweite Darstellung $v = \sum_{k=1}^n \lambda'_k v_k$ gibt, so gilt

$$0 = v - v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k - \sum_{k=1}^n \lambda'_k v_k = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda'_k) v_k.$$

Die lineare Unabhängigkeit der Basisvektoren liefert also $\lambda_k - \lambda'_k = 0$ für alle k und damit die Eindeutigkeit der Darstellung.

Sei nun $v_1, \ldots, v_n \in V$ so, dass es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k.$$

Die Existenz dieser Darstellung impliziert, daß $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem ist. Bleibt zu zeigen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Nehmen wir dazu an, dass

$$0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k.$$

Dies ist eine Darstellung des Nullvektors, eine andere ist

$$0 = \sum_{k=1}^n 0 v_k.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit folgt, dass $\lambda_k = 0$ für alle k. Somit ist auch die lineare Unabhängigkeit gezeigt.

Definition. Ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißt *unverkürzbar*, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr bilden.

Definition. Linear unabhängige $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen *unverlängerbar linear unabhängig*, wenn für jedes $v_{n+1} \in V$ die Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ nicht mehr linear unabhängig sind.

Satz 2.3. Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind genau dann eine Basis des Vektorraums V, wenn sie

- ein unverkürzbares Erzeugendensystem, oder
- unverlängerbar linear unabhängig sind.

Beweis: Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem und $0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$. Ist $\lambda_i \neq 0$, so folgt

$$v_i = - \sum_{\substack{k=1,\ldots,n \\ k \neq i}} \lambda_i^{-1} \lambda_k v_k.$$

Damit folgt aber auch, dass $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem ist, denn jeder Vektor $v \in V$ hat eine Darstellung

$$v = \sum_{k=1}^{n} \mu_k v_k = \sum_{\substack{k=1,\ldots,n \\ k \neq i}} (\mu_k - \mu_i \lambda_i^{-1} \lambda_k) v_k.$$

Das ist ein Widerspruch zur Unverkürzbarkeit, also müssen alle $\lambda_i = 0$ sein. Damit sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und folglich eine Basis.

Seien jetzt $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Basis. Wir zeigen, dass $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem sind. Wenn sie das wären, so gäbe es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$v_i = \sum_{\substack{k=1,\ldots,n \\ k \neq i}} \lambda_k v_k.$$

Es folgte

$$0 = \sum_{\substack{k=1,\ldots,n \\ k \neq i}} \lambda_k v_k + (-1) v_i$$

und aufgrund der linearen Unabhängigkeit $-1 = 0$, ein Widerspruch. Also ist $v_1, \ldots, v_n$ unverkürzbar.

Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ unverlängerbar linear unabhängig und $v_{n+1} \in V$ beliebig. Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ mit

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k v_k$$

und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$. Es muß dann auch $\lambda_{n+1} \neq 0$ sein, ansonsten folgte aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$, dass alle $\lambda_i = 0$ sind. Dann folgt

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (-\lambda_{n+1}^{-1} \lambda_k) v_k$$

und somit ist $v_1, \ldots, v_n$ Erzeugendensystem und daher auch Basis.

Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ wieder eine Basis. Wir zeigen, dass die Basisvektoren unverlängerbar linear unabhängig sind. Ist nämlich $v_{n+1} \in V$, so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Dann ist

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k + (-1) v_{n+1},$$

was die lineare Abhängigkeit von $v_1, \ldots, v_{n+1}$ zeigt.

Definition. Ein Vektorraum heißt *endlich erzeugt*, wenn er ein Erzeugendensystem aus endlich vielen Vektoren hat.

Korollar 2.4. Ist ein Vektorraum V endlich erzeugt, so hat er eine Basis.

Beweis: Ist $v_1, \dots, v_n$ Erzeugendensystem, so ist es entweder unverkürzbar und damit eine Basis, oder es gibt ein i so dass $v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem ist. Auf diese Weise kann man jedes Erzeugendensystem verkürzen bis es unverkürzbar wird.

Korollar 2.5. Ist ein Vektorraum V nicht endlich erzeugt, so gibt es eine Folge (v_n) von Vektoren in V, so dass für alle n die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind.

Beweis: Angenommen V ist nicht endlich erzeugt. Wir konstruieren die Folge (v_n) per Induktion, so dass für alle n die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind. Wir beginnen mit einem beliebigen $v_1 \neq 0$ (das existiert, da $V \neq \{0\}$) und beobachtern, dass v_1 linear unabhängig ist. Angenommen $v_1, \dots, v_n$ sind gegeben und linear unabhängig. Da V keine Basis hat, ist $v_1, \dots, v_n$ verlängerbar linear unabhängig, also gibt es ein $v_{n+1} \in V$ so dass $v_1, \dots, v_{n+1}$ linear unabhängig sind, wie verlangt.

Satz 2.6. (Austauschsatz von Steinitz) Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis und $w_1, \dots, w_k$ linear unabhängige Vektoren in V, so ist $k \leq n$ und es gibt Vektoren $w_{k+1}, \dots, w_n \in \{v_1, \dots, v_n\}$, so dass $w_1, \dots, w_n$ eine Basis von V ist.

Wir benötigen zum Beweis das folgende Lemma.
Lemma 2.7. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis und

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

mit $\lambda_i \neq 0$, so ist auch $v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n$ eine Basis.

Beweis: Aus der Darstellung von v folgt eine Darstellung von v_i, nämlich

$$v_i = \lambda_i^{-1} v - \sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ k \neq i}} \lambda_i^{-1} \lambda_k v_k.$$

Also ist v im von $v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n$ aufgespannten Raum. Daher erzeugen diese Vektoren ganz V. Zur linearen Unabhängigkeit nehmen wir an, dass

$$\sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ k \neq i}} \mu_k v_k + \lambda v = 0.$$

Dann folgt mit $\mu_i := 0$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} (\mu_k + \lambda\lambda_k) v_k = 0.$$

Also ist $\mu_k + \lambda\lambda_k = 0$ für alle k. Für $k = i$ folgt $\lambda\lambda_i = 0$ und somit $\lambda = 0$. Daraus folgt dann auch $\mu_k = 0$, wie gefordert.

Beweis von Satz 2.6. Wir fixieren eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ und beweisen die Aussage, die wir $A(k)$ nennen, durch vollständige Induktion nach k. Die Aussage $A(1)$ folgt aus Lemma 2.7. Es gelte also $A(k)$ und $w_1, \ldots, w_{k+1}$ seien linear unabhängig. Wegen $A(k)$ angewandt auf $w_1, \ldots, w_k$ folgt, dass $k \leq n$ und es gibt Vektoren $w'_{k+1}, \ldots, w'_n \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, so dass $w_1, \ldots, w_k, w'_{k+1}, \ldots, w'_n$ eine Basis von V ist. Wäre $k = n$, so wäre $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis, aber verlängerbar linear unabhängig, was ein Widerspruch zu Satz 2.3 wäre. Also gilt sogar $k + 1 \leq n$.

Wir schreiben

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \lambda_{k+1} w'_{k+1} + \ldots + \lambda_n w'_n.$$

Wäre $\lambda_{k+1} = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, so entstünde ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_{k+1}$. Also existiert $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$ und nach Lemma 2.7 können wir w'_i durch w_{k+1} ersetzen und erhalten eine Basis, wie gefordert.

Korollar 2.8. Sei V ein Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ zwei Basen. Dann gilt $n = m$.

Beweis: Das folgt direkt aus dem Austauschsatz.

Definition. Alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraumes haben die gleiche Länge, die wir *Dimension* des Vektorraums nennen. Ein Vektorraum, der nicht endlich erzeugt ist, hat Dimension unendlich.

Beispiele:

- *Der Vektorraum $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ der reellen Polynome hat Dimension unendlich.*

  Sind $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ und

  $$v_i = a_{0i} + a_{1i}x + \cdots + a_{n_i i}x^{n_i},$$

  so folgte mit $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, dass jedes Polynom im von $v_1, \ldots, v_k$ erzeugten Unterraum keine Monome der Form x^m, $m > n$, hat (man sagt, der Grad des Polynoms ist höchstens n). Also ist $v_1, \ldots, v_k$ kein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ und insbesondere ist $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ nicht endlich erzeugt.

- *Der d-dimensionale Euklidische Raum $\mathbb{R}^d$ hat Dimension d.*

  Man prüft leicht, dass durch $v_1, \ldots, v_d$ mit

  $$v_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{di})$$

  und

  $$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = i \\ 0 & \text{wenn } k \neq i. \end{cases}$$

  eine Basis gegeben ist.

5.3 Matrizen und lineare Abbildungen

Definition. Seien V, W Vektorräume. Eine Abbildung $A\colon V \to W$ heißt *linear*, wenn gilt

$$A(v + w) = A(v) + A(w), \quad A(\lambda v) = \lambda A(v) \text{ für alle } v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ist A bijektive lineare Abbildung, so heißt A ein *Isomorphismus.*

Ist eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ gegeben, so ist

$$\mathrm{Kern}(A) = \{v \in V\colon A(v) = 0\}$$

ein Unterraum von V und

$$\mathrm{Bild}(A) = \{A(v) \in W\colon v \in V\}$$

ein Unterraum von W.

Beobachtungen: A ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$, und genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Bild}(A) = V$. Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig in V, so sind auch $A(v_1), \ldots, A(v_n)$ linear abhängig in W. Sind aber $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig , so können $A(v_1), \ldots, A(v_n)$ linear abhängig sein.

Satz 3.1 Sind $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_d$ beliebige Vektoren. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ mit $A(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Beweis: Ist $v \in V$ so gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Dann definieren wir $A(v) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$ und die so definierte Abbildung $A\colon V \to W$ ist linear und erfüllt $A(v_i) = w_i$. Umgekehrt erfüllt eine beliebige lineare Abbildung $A\colon V \to W$ mit $A(v_i) = w_i$ die obige Gleichung, was die Eindeutigkeit belegt.

Wenn V und W endlich erzeugte Vektorräume mit Basen $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$ sind und $A\colon V \to W$ lineare Abbildung, so gibt es eindeutige bestimmte Zahlen $a_{ij}, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$A(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m.$$

Umgekehrt gibt es für alle $a_{ij}, i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$ nach Satz 3.1 genau eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ mit $A(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Man nennt

$$(a_{ij}) = \big(a_{ij}, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\big)$$

eine $m \times n$ *Matrix*. Man erhält aus der Darstellung eines Vektors

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} A(v) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A(v_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_{1k}w_1 + \cdots + a_{mk}w_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\lambda_k \Big) w_j = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j \end{aligned}$$

mit

$$\mu_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\lambda_k.$$

Schreibt man die Matrx als rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten so erhält man $A(v)$ in der Form eines Zeilenvektors $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, indem man $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ als Spaltenvektor von rechts an die Matrix (a_{ij}) heranmultipliziert, wie in der Vorlesung gezeigt.

Der folgende Satz zeigt, dass bei geschickter Wahl der Basen die darstellende Matrix eine sehr einfache Struktur haben kann.

Satz 3.2 (Fundamentallemma) Seien V, W endlich erzeugte Vektorräume und $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es

- eine Basis $v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_{d+n}$ von V,
- eine Basis $w_1, \ldots, w_d, v_{d+1}, \ldots, v_{d+m}$ von W,

so dass

- $v_{d+1}, \dots, v_{d+n}$ ist eine Basis von Kern(A),
- $w_1, \dots, w_d$ ist eine Basis von Bild(A),
- es gilt $A(v_1) = w_1, \dots, A(v_d) = w_d$.

Insbesondere gilt die *Dimensionsformel*

$$\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) = \dim V.$$

Beweis: Sei $u_1, \dots, u_n$ eine Basis von Kern$(A) \subset V$ und $v'_1, \dots, v'_{d+n}$ eine Basis von V. Nach dem Steinitzschen Austauschsatz gibt es Vektoren

$$u_{n+1}, \dots, u_{n+d} \in \{v'_1, \dots, v'_{d+n}\},$$

so dass $u_1, \dots, u_{n+d}$ eine Basis von V ist. Durch umnumerieren dieser Vektoren erhält man also eine Basis $v_1, \dots, v_{d+n}$ von V, so dass $v_{d+1}, \dots, v_{d+n}$ eine Basis von Kern(A) ist.

Wir definieren nun $w_1 = A(v_1), \dots, w_d = A(v_d)$ und zeigen gleich, dass $w_1, \dots, w_d$ ist eine Basis von Bild(A) ist. Nach dem Steinitzschen Austauschsatz gibt es dann Vektoren $w_{d+1}, \dots, w_{d+m}$ so, dass $w_1, \dots, w_{d+m}$ eine Basis von W bilden, wie gefordert.

Wir zeigen zunächst, dass $w_1, \dots, w_d$ ein Erzeugendensystem von Bild(A) ist. Ist nämlich $v \in V$ so gibt es eine Darstellung $v = \sum_{k=1}^{d+n} \lambda_k v_k$ und somit gilt

$$A(v) = \sum_{k=1}^{d+n} \lambda_k A(v_k) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k w_k,$$

da $A(v_i) = 0$ für $i \in \{d+1, \dots, d+n\}$. Das beweist, dass $w_1, \dots, w_d$ ein Erzeugendensystem von Bild(A) ist.

Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit von $w_1, \dots, w_d$. Sei

$$0 = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k w_k.$$

Dann gilt für $v = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k v_k$ dass $A(v) = 0$. Also ist $v \in \mathrm{Kern}(A)$ und hat eine Darstellung $v = \lambda_{d+1} v_{d+1} + \cdots + \lambda_{d+n} v_{d+n}$. Da $v_1, \dots, v_{d+n}$ eine Basis von V ist, müssen die beiden Darstellungen von v übereinstimmen, was nur möglich ist, wenn $\lambda_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d+n\}$, woraus die Unabhängigkeit folgt. Die Dimensionsfomel folgt durch Vergleich des Längen der Basen.

Übung: Überlegen Sie sich, wie die Matrix aussieht, die eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ bezüglich der im Fundamentallemma gegebenen Basen darstellt.

Bemerkung: Möchte man für eine lineare Abbildung $A\colon V \to V$ (auch *Endomorphismus* genannt) durch Wahl einer geeigenten Basis eine darstellende Matrix von einfacher Form bekommen, so ist das ein wesentlich schwierigeres Problem, wenn man in Defintionsbereich und Bildbereich *dieselbe* Basis zugrundelegen möchte. Dieses sogenannte Normalformenproblem besprechen wir im zweiten Teil der Vorlesung.

5.4 Lineare Gleichungssysteme

Wir wollen Probleme der folgenden Form lösen:

Gegeben zwei endlich erzeugte Vektorräume V, W und eine Abbildung $A\colon V \to W$, sowie ein Vektor $w \in W$, finde alle $v \in V$ mit $A(v) = w$.

In der Praxis sind Basen $v_1, \dots, v_n$ von V und $w_1, \dots, w_m$ von W gegeben und A is durch eine $m \times n$ Matrix (a_{ij}) beschrieben. w ist durch die Basis als

$$w = \sum_{k=1}^{m} b_k w_k$$

gegeben und die Lösungen werden in der Form

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

beschrieben. Dann hat $A(v)$ die Form

$$\begin{aligned} A(v) &= \sum_{k=1}^{n} x_k A(v_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k (a_{1k} w_1 + \cdots + a_{mk} w_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \Big) w_j. \end{aligned}$$

und das Problem $A(v) = w$ hat die Form eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit Unbekannten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Beobachtung: Ist $B\colon W \to W$ ein Isomorphismus, so gilt $A(v) = w$ genau dann, wenn $B \circ A(v) = B(w)$. Das gilt weil ein Isomorphismus eine Umkehrabbildung B^{-1} hat. Da $B \circ A$ auch wieder eine lineare Abbildung ist, möchte man ein B finden, so dass die darstellende Matrix von $B \circ A$ von möglichst einfacher Form ist.

Definition: Die folgenden Abbildungen $B^{\lambda}_{i,j}, B_{i,j}\colon W \to W$ sind spezielle Isomorphismen, die *Zeilentransformationen* genannt werden.

- Für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere $B^{\lambda}_{i,j}\colon W \to W$ durch $B^{\lambda}_{i,j}(w_j) = w_j + \lambda w_i$ und $B^{\lambda}_{i,j}(w_k) = w_k$ für $k \neq j$.

  Lemma 4.1 Ist (a_{ij}) die Matrixdarstellung von A, so ist die Matrixdarstellung von $B^{\lambda}_{i,j} \circ A$ dieselbe Matrix mit dem λ-fachen der $j$ten Zeile zur $i$ten Zeile addiert.

  Beweis: Es gilt

  $$\begin{aligned} B^{\lambda}_{i,j} \circ A(v_k) &= a_{1k} B^{\lambda}_{i,j}(w_1) + \cdots + a_{mk} B^{\lambda}_{i,j}(w_m) \\ &= \sum_{l=1}^{m} a_{lk} w_l + a_{jk} \lambda w_i \end{aligned}$$

- Für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ definiere $B_{i,j}\colon W \to W$ durch $B_{i,j}(w_j) = w_i$, $B_{i,j}(w_i) = w_j$und $B_{i,j}(w_k) = w_k$ für $k \neq i, j$.

  Lemma 4.2 Ist (a_{ij}) die Matrixdarstellung von A, so ist die Matrixdarstellung von $B_{i,j} \circ A$ dieselbe Matrix mit der $i$ten und der $j$ten Zeile vertauscht.

  Beweis: Es gilt

  $$\begin{aligned} B_{i,j} \circ A(v_k) &= a_{1k} B_{i,j}(w_1) + \cdots + a_{mk} B_{i,j}(w_m) \\ &= \sum_{\substack{l=1,\dots,m \\ k \neq i,j}} a_{lk} w_l + a_{ik} w_j + a_{jk} w_i. \end{aligned}$$

Definition: Eine $m \times n$ Matrix (a_{ij}) hat *Zeilenstufenform*, wenn in jeder Zeile am Anfang eine Folge von Nullen steht, die mindestens eine Null mehr umfasst als die Zeile direkt darüber.

Satz 4.3 Gegeben zwei endlich erzeugte Vektorräume V, W mit festen Basen und eine Abbildung $A\colon V \to W$, so gibt es einen Isomorphismus $B\colon W \to W$, der eine Verknüpfung von Zeilentransformationen ist, so dass die darstellende Matrix von $B \circ A\colon V \to W$ Zeilenstufenform hat.

Beweis: Wir wollen wir einen Algorithmus beschreiben, der Zeilenstufenform herstellt und erklären, wie man in der Praxis mithilfe der Zeilenstufenform Gleichungssysteme explizit lösen kann. Die Methode heißt *Gauß-Elimination.*

Algorithmus : Für jede Spalte $k = 1, \dots, n$:

- In der betroffenen Spalte gibt es einen Eintrag auf oder oberhalb der Diagonale, so dass alle in der gleichen oder darunterliegenden Zeilen links davon stehenden Einträge null sind und so dass, um Zeilenstufenform zu haben, in der betroffenen Spalte unterhalb des Eintrags Nullen stehen müssen. Identifiziere diesen Eintrag.

- Ist dieser Eintrag in der aktuellen Spalte Null und steht unter diesem Eintrag ein von Null verschiedener Eintrag, so vertausche die Zeilen.

- Ist der Eintrag in der aktuellen Spalte jetzt ungleich Null, so addiere Vielfache dieser Zeile zu den folgenden Zeilen, bis unter dem Eintrag nur Nullen stehen.

Es ist nun einzusehen, dass dieser Algorithmus jede Matrix A auf Zeilenstufenform bringt. Dies beendet den Beweis.

Zur **Lösung von linearen Gleichungssystemen** gehen wir folgendermaßen vor.

- Wende Zeilentransformationen auf die um die Spalte $(b_1, \dots, b_m)$ erweiterte Matrix $(A \mid b)$ an, bis der linke Teil (der A entspricht) Zeilenstufenform hat.

- Stehen dann in einer Zeile, deren linker Teil gleich Null ist, im rechten Teil noch Einträge die nicht gleich null sind, so hat das Problem keine Lösung.

- Ansonsten existieren Lösungen. Wenn in der Zeilenstufenform in der $k$ten Zeile am Anfang eine Folge von genau $k - 1$ Nullen steht, für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, so ist die Lösung eindeutig und kann leicht induktiv bestimmt werden.

- Ansonsten kann man Variablen finden, an die keine Restriktionen gestellt werden, und mit denen man die Lösungsmenge parametrisieren kann. In diesem Fall gibt es also unendlich viele Lösungen.

Am besten kann man das ganze an Beispielen verstehen, die wir in Vorlesung und Übungen rechnen werden.